LOIS USUELLES DISCRÈTES

Sous PYTHON les commandes permettant de simuler les lois usuelles sont contenues dans la bibliothèque `numpy.random` que l'on importe en tapant :

```
import numpy.random as nr
```

I - Lois usuelles discrètes finies

1 - Lois uniformes discrètes $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ (avec $n \in \mathbb{N}$)

Modélisation : Elle traduisent une situation d'équiprobabilité dans laquelle intervient une variable X.

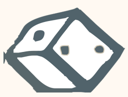
Exemple typique : On pioche une boule au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n indiscernables au toucher. La variable aléatoire donnant le numéro d'une boule piochée suit la loi uniforme $\mathcal{U}[[1;n]]$.

Commande PYTHON : `nr.randint(a,b,(n,m))` renvoie un tableau $n \times m$ constitué de variables indépendantes suivant $\mathcal{U}[[a;b-1]]$.

PROPRIÉTÉ 1

Support

$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$



Loi

$P(X = k) = \dfrac{1}{n}$

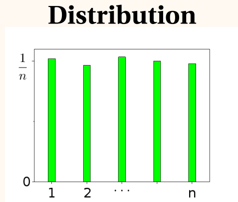
Variance

$V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$

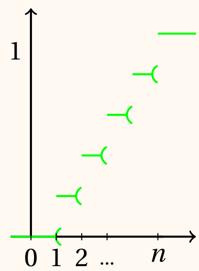
Espérance

$E(X) = \dfrac{n+1}{2}$

Distribution



Fonction de répartition



Exercice 1 : Lois uniformes $\mathcal{U}[[a;b]]$:

On dit que X suit la loi $\mathcal{U}\llbracket a, b \rrbracket$ si :

$$X(\Omega) = [[a;b]] \text{ et } \forall k \in [[a;b]], \quad P(X = k) = \frac{1}{b-a+1}.$$

1. Montrer que Y suit la loi $\mathcal{U}\llbracket a, b \rrbracket$ si et seulement si $X + (a-1)$ suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
2. Donner l'expression de $E(Y)$ et $V(Y)$ en fonction de a et b.

2- Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ (avec $p \in]0,1[$)

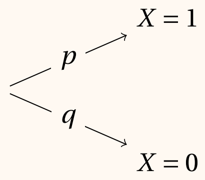
Modélisation : Elles modélisent une épreuve à deux issues dans laquelle on attribue la valeur 1 à l'une des deux issues et 0 à l'autre.

Exemple typique : On lance une pièce amenant PILE avec probabilité p. La variable aléatoire prenant la valeur 1 si on tombe sur PILE et 0 si on tombe sur FACE suit la loi $\mathscr{B}(p)$.

PROPRIÉTÉ 2

Support
$X(\Omega) = \{0, 1\}$

Loi
$P(X=1) = p$
$P(X=0) = 1 - p = q$



Variance
$V(X) = pq$

Espérance
$E(X) = p$

Exercice 2 : La loi de Rademacher
On dit que X suit la loi de Rademacher si : $X(\Omega) = \{-1;1\}$ et $P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que X suit la loi de Rademacher si et seulement si $\dfrac{X+1}{2}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
2. Ecrire une commande `Python` permettant de simuler une variable aléatoire suivant la loi de Rademacher.

3 - Loi Binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$)

Modélisation : Variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus à la suite de n épreuves de Bernoulli **indépendantes** de paramètre p. En d'autres termes :
$X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p) \iff X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où les variables $(X_1, ..., X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.

Exemple typique : la variable aléatoire égale au nombre PILE obtenus après n lancers d'une pièce amenant PILE avec probabilité p.

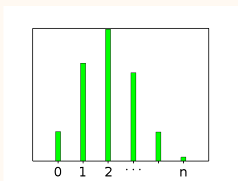
Commande `PYTHON : nr.binomial(n,p,(r,s))` renvoie un tableau $r \times s$ constitué de variables indépendantes suivant la loi $\mathscr{B}(n,p)$.
Remarque : La définition de la loi binomiale $\mathscr{B}(1,p)$ coïncide avec la définition de la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, ainsi la commande `PYTHON : nr.binomial(1,p,(n,m))` renvoie un tableau $n \times m$ constitué de variables indépendantes suivant la loi $\mathscr{B}(p)$.

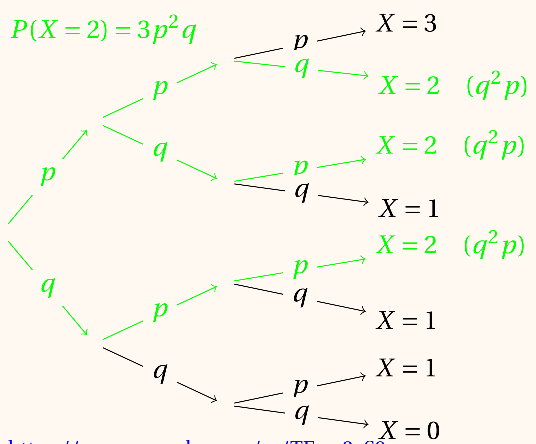
PROPRIÉTÉ 3

Support
$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$

Loi
$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Distribution





https://www.geogebra.org/m/TFwq3vS9
https://www.geogebra.org/m/k9QT6WBT

Variance
$V(X) = npq$

Espérance
$E(X) = np$

II - Lois usuelles discrètes infinies

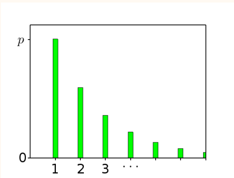
1- Loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ (avec $p \in]0,1[$)

Modélisation : Variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier succès obtenu à la suite d'une succession d'épreuves de Bernoulli **indépendantes** de paramètre p
Exemple typique : La variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier PILE obtenu dans une succession de lancers d'une pièce amenant PILE avec probabilité p suit la loi $\mathscr{G}(p)$.
Commande PYTHON : `nr.geometric(p,(r,s))` renvoie un tableau $r \times s$ constitué de variables indépendantes suivant la loi $\mathscr{B}(n,p)$.

PROPRIÉTÉ 4

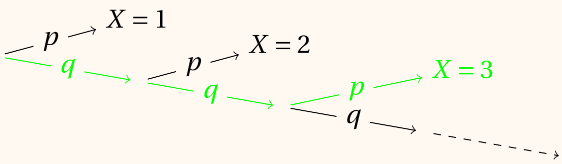
Support
$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

Distribution



Loi
$P(X=k) = q^{k-1}p$

$P(X=3) = q^2 p$



Variance
$\dfrac{q}{p^2}$

Espérance
$E(X) = \dfrac{1}{p}$

Exercice 3 : Loi du deuxième PILE
On lance successivement une pièce amenant PILE avec probabilité $p \in]0;1[$.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier PILE et Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition du 2ème PILE.

1. Reconnaitre la loi de X.
2. Déterminer le support de Y.
3. Déterminer pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^* \times [[2;+\infty[[$ la probabilité conditionnelle $P_{(X=k)}(Y=n)$.
4. En déduire la loi de Y.
5. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

2- Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$)

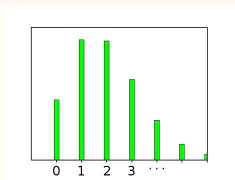
Modélisation : pas de modélisation ni d'exemple typique au programme pour cette loi.

Commande PYTHON : `nr.poisson(lambda,(r,s))` renvoie un tableau $r \times s$ constitué de variables indépendantes suivant la loi $\mathscr{P}(\lambda)$.

PROPRIÉTÉ 5

Support
$X(\Omega) = \mathbb{N}$

Distribution



Loi
$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Lien 1 :La loi de poisson...avec des poissons

Lien 2 :https://www.geogebra.org/m/JzpkSqVy

Variance
λ

Espérance
$E(X) = \lambda$